Definitionen

Im Folgenden bezeichnen doppelt unterstrichene Grossbuchstaben Matrizen ($\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$), und einfach unterstrichene Kleinbuchstaben Vektoren ($\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$). Dabei sind Vektoren äquivalent zu Matrizen mit einer Spalte. Ein hochgestelltes † bezeichnet die tranponiert konjugiert komplexe Matrix, mit den Elementen:

$$(A)^\dagger_{ij} = A^*_{ji}$$

Man nennt diese Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\dagger$ auch die adjungierte Matrix von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$. Der adjungierte Vektor zum Spaltenvektor $\underline{\mathbf{a}}$ ist dann der Zeilenvektor $\underline{\mathbf{a}}^\dagger$.

Für die Multiplikation zweier Matrizen gilt:

$$(\underline{\underline{\mathbf{AB}}})_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}$$

Die Summe über alle j läuft dabei über alle Spalten der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und alle Zeilen der Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$. Die Multiplikation ist also nur definiert für Matrizen, in denen diese beiden Werte gleich sind.

Wenn das Produkt zweier Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ die Einheitsmatrix ergibt, dann nennt man $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ die inverse Matrix von $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ (und umgekehrt). Beide Matrizen müssen dann quadratisch sein.

$$\underline{\underline{\mathbf{AB}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}} \to \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}\ ;\ \underline{\underline{\mathbf{A}}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{-1}$$

Eine Matrix, die gleich ihrer Adjungierten ist, nennt man selbstadjungiert oder hermiteisch:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}}^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{A}}} \to \text{hermiteisch!}$$

Folglich sind die Diagonalelemente einer hermiteischen Matrix reell.

Eine besondere Art von quadratischen Matrizen sind sogenannte unitäre Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ mit der Eigenschaft

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}^\dagger \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}\,\underline{\underline{\mathbf{U}}}^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$$

d.h., die adjungierte Matrix einer unitären Matrix ist die inverse Matrix:

$$\underline{\underline{\mathbf{U}}}^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}$$

Funktionen von Matrizen sind durch die Taylorreihe der Funktion definiert, also z.B.

$$\exp\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}} + \frac{1}{2}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\underline{\underline{\mathbf{A}}}^n + \cdots$$

Aufgabe 1

Verifizieren Sie ggf. durch Ausschreiben in den Komponenten:

$$(\underline{\underline{\mathbf{AB}}})^\dagger = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^\dagger \underline{\underline{\mathbf{A}}}^\dagger$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass das Produkt zweier hermiteischen Matrizen auch hermiteisch ist, wenn die Matrizen kommutieren, d.h. wenn gilt:

$$[\underline{\underline{\mathbf{A}}}, \underline{\underline{\mathbf{B}}}] = \underline{\underline{\mathbf{AB}}} - \underline{\underline{\mathbf{BA}}} = 0$$

Aufgabe 3

Beweisen Sie folgende Gleichungen:

$$\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{BA}}})$$

$$\mathrm{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{ABC}}}) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{CAB}}}) = \mathrm{Tr}(\underline{\underline{\mathbf{BCA}}})$$

Aufgabe 4

Gegeben sei eine unitäre Matrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ welche die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ in folgender Weise in eine Matrix $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ transforiert:

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^\dagger \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{U}}}$$

(a) Wie kann man $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ nach $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ transformieren?

(b) Zeigen Sie, dass die Spuren der beiden Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ and $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ gleich sind.

(c) Zeigen Sie, dass die Determinanten der beiden Matrizen $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ and $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$ gleich sind. (Hinweis: es gilt

$$\det(\underline{\underline{\mathbf{AB}}}) = \det(\underline{\underline{\mathbf{A}}}) \cdot \det(\underline{\underline{\mathbf{B}}})$$

Aufgabe 5

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{B}}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \underline{\underline{\mathbf{U}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(a) sind diese Matrizen hermiteisch?

(b) kommutieren die Produkte von $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ und $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$?

(c) bilden Sie die Spur und Determinante dieser Produkte.

(d) Zeigen Sie, dass die Matrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ unitär ist.

(e) Transformieren Sie $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$ mit $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$. Fällt Ihnen dabei etwas auf?

Aufgabe 6

Betrachten Sie eine hermiteische Matrix $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$, die durch eine unitäre Matrix $\underline{\underline{\mathbf{U}}}$ in die Diagonalform $\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}$ gebracht wird

$$\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}} = \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{A}}}\,\underline{\underline{\mathbf{U}}} = \mathrm{diag}\,[\lambda_1..\lambda_n]$$

Zeigen Sie, dass gilt:

$$\exp\left(\underline{\underline{\mathbf{A}}}\right) = \underline{\underline{\mathbf{U}}} \exp\left(\underline{\underline{\mathbf{\Lambda}}}\right) \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbf{U}}} \mathrm{diag}\,[\exp(\lambda_1)..\exp(\lambda_n)]\, \underline{\underline{\mathbf{U}}}^{-1}$$

Matrizenrechnen mit MAPLE

Mit MAPLE lassen sich Matrizenrechnungen leicht durchführen. So können Sie Ihre Rechnungen überprüfen und auch mit größeren Matrizen spielen, die für Papier-und-Bleistift Rechnungen zu mühsam sind. Die Matrizenfunktionen laden Sie mit:

```
> with(LinearAlgebra);
```

Die Matrizen aus Aufgabe 5 geben Sie so ein:

```
> A := Matrix(2, 2, [0, sqrt(2), sqrt(2), 1]);
> B := Matrix(2, 2, [-1, 0, 0, 1]);
> U := Matrix(2, 2, [-sqrt(2), 1, 1, sqrt(2)])/sqrt(3);
```

Zwei Matrizen werden multipliziert mit

```
> C := MatrixMatrixMultiply(B, A);
```